



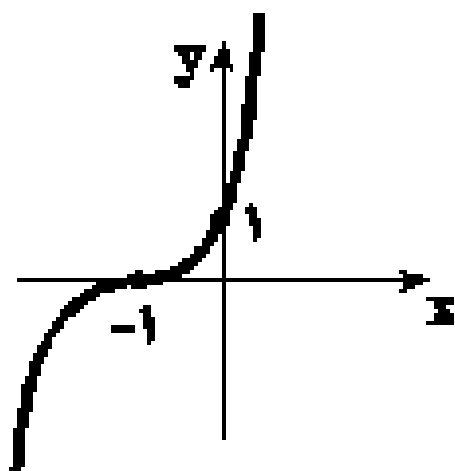
shakeryan.com

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: تابع دوازدهم-درس ۱-قلم چی

①

نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ به صورت مقابل می باشد، $a + b$ کدام است؟



۶ (۲)

۱) صفر

۴ (۴)

۲ (۳)

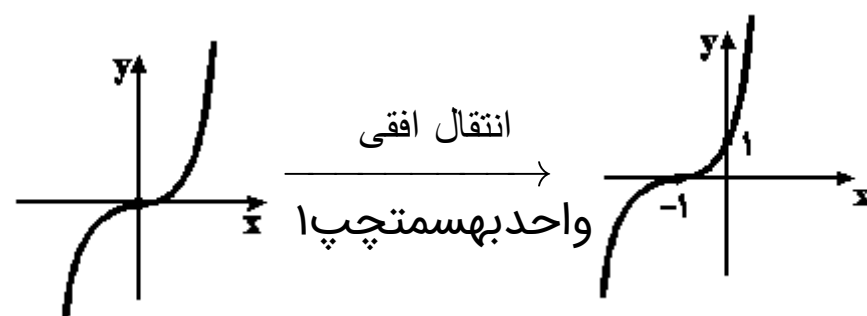
دشوار

قلم چی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نمودار مورد نظر، مربوط به تابع $y = (x + 1)^3$ می باشد.



$$y = (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 6$$

۲

نمودارهای دو تابع $f(x) = 3x - 3x^2 + x^3$ و f^{-1} ، در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

ساده

درصد پاسخگویی ۴۴%

قلمچی ۱۳۹۹

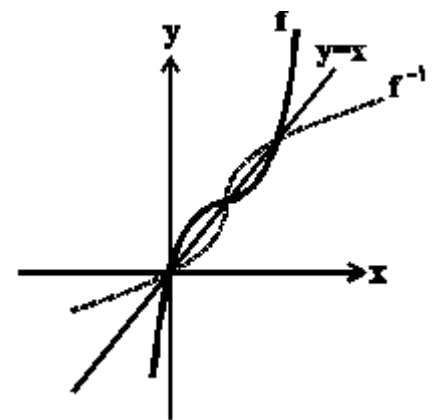
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ضابطه f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = 3x - 3x^2 + x^3 = (x - 1)^3 + 1$$

مطابق شکل نمودار تابع و وارون آن در سه نقطه متقاطع هستند.



۳

وارون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ با دو انتقال برتابع $g(x) = -2 + \sqrt[3]{x+1}$ منطبق می‌شود. این دو انتقال کدام است؟

- (۱) سه واحد به چپ و سه واحد به بالا
(۲) سه واحد به راست و سه واحد به بالا
(۳) سه واحد به راست و سه واحد به پایین
(۴) سه واحد به چپ و سه واحد به پایین

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۳۸% ساده

گزینه «۴»

$$f(x) = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{(x-1)^3} + 2 = (x-1)^3 + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2} + 1$$

اگر تابع $f^{-1}(x)$ را ۳ واحد به چپ و پس ۳ واحد به پائین منتقل کنیم، منطبق بر تابع $g(x)$ خواهد شد.

$$f^{-1}(x) \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{سه واحد}} y = 1 + \sqrt[3]{(x+3)-2}$$

$$= 1 + \sqrt[3]{x+1} \xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{سه واحد}} y = (1 + \sqrt[3]{x+1}) - 3$$

$$\Rightarrow g(x) = -2 + \sqrt[3]{x+1}$$

۴

در بازه $[a, b]$ ، نمودار تابع $f(x) = |x| + |x - 2|$ اکیداً یکنواخت و زیر خط $y = 4 - x$ قرار می‌گیرد. حاصل $b - a$ کدام است؟

۲ (۲)

۴ (۴)

۱ (۳)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

متوسط

درصد پاسخگویی ۲%

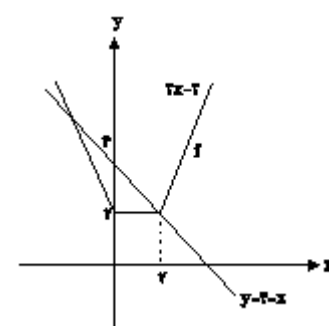
قلمچی ۱۴۰۰

گزینه های دام دار ۱

گزینه «۲»

نمودار تابع f و خط داده شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x; & x < 0 \\ 2; & 0 \leq x < 2 \\ 2x - 2; & x \geq 2 \end{cases}$$



نمودار تابع f در بازه $[-\infty, 0]$ اکیداً یکنواست که قسمتی از آن زیر خط قرار می‌گیرد، پس $b = 0$ است.

مقدار a نیز طول نقطه تلاقی ضابطه $y = 2 - 2x$ از f با خط $y = 4 - x$ است:

$$\Rightarrow 2 - 2a = 4 - a \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow b - a = 2$$

⑤

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x - 2)|x|$ در کدام نقطه به طول زیر، از صعودی به نزولی تغییر جهت می‌دهد؟

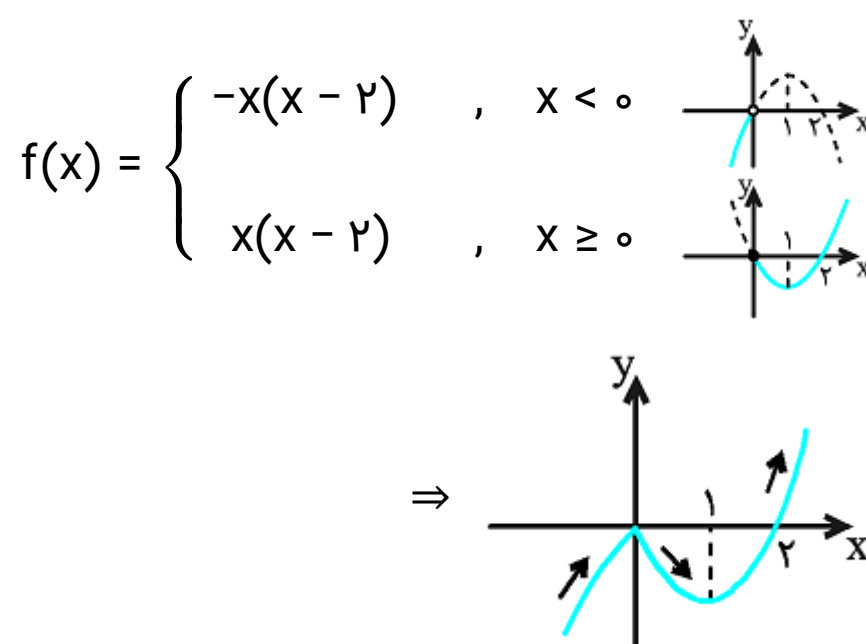
- ۱ (۱) ۲ (۲) صفر ۳ (۳) -۱ ۴ (۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۲

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ نسبتا دشوار

گزینه «۲»

نمودار تابع را رسم می‌کنیم، برای این منظور تابع را به یک تابع چندضابطه‌ای با تعیین علامت قدرمطلق تبدیل می‌کنیم.



با توجه به نمودار دیده می‌شود که در $x = 0$ تابع از صعودی به نزولی تغییر علامت می‌دهد.

۶

تابع $f(x) = x|x| - x$ روی بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $f(a) - f(b)$ کدام است؟

- (۲) ۱
(۴) ۲

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{4}$

متوسط

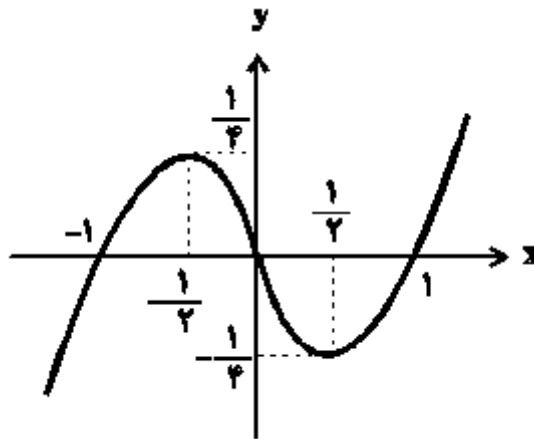
درصد پاسخگویی ۲۳%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا نمودار تابع $f(x) = x|x| - x$ را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = x|x| - x = \begin{cases} x^2 - x; & x > 0 \\ -x - x^2; & x \leq 0 \end{cases}$$



ملاحظه می‌کنید که بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ بزرگترین بازه‌ای است که تابع f بر روی آن اکیداً نزولی است، پس بیشترین مقدار $f(a) - f(b)$ برابر است با:

$$f(-\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

۷

اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = |x - a| - |x - b|$ در آن اکیداً نزولی است، به صورت $[-۳, ۵]$ باشد، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

(۴) $(-۳, ۵)$

(۳) $(-۵, ۳)$

(۲) $(۵, -۳)$

(۱) $(۳, -۵)$

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۷%

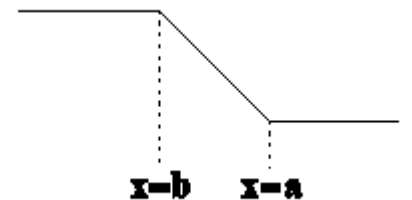
قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

چون تابع به صورت آبخاری یا سرسره‌ای است و قرار است نزولی باشد، پس باید $a > b$ باشد، این توابع بین ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق اکیداً یکنوا هستند پس ۵ و -۳ همان ریشه‌ها هستند:

$$\left. \begin{array}{l} a = ۵ \\ b = -۳ \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) = (۵, -۳)$$



بزرگترین بازه‌ای که تابع با ضابطه‌ی $y = |\log(-x + 1)|$ در آن اکیداً نزولی است، کدام است؟

- (۱) $[0, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 0]$ (۳) $[0, 1)$ (۴) $(-\infty, 1]$

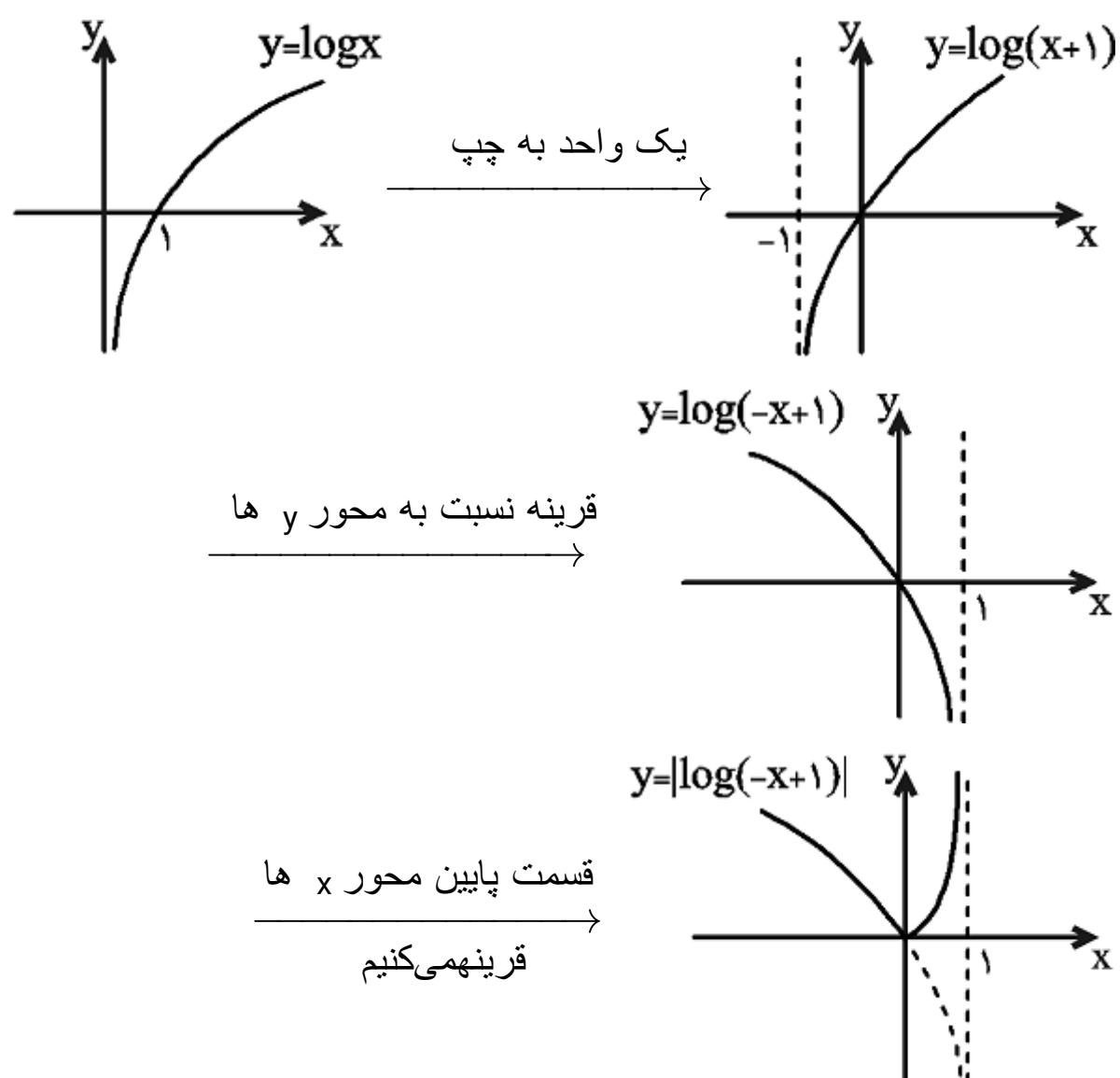
پاسخ: گزینه ۲

نسبتا دشوار

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹

گزینه «۲»

نمودار تابع $y = |\log(-x + 1)|$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است.

۹

تابع f در اعداد حقیقی اکیداً نزولی و $f(2) = 0$ است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{(x-1)f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

(۴) بی‌شمار

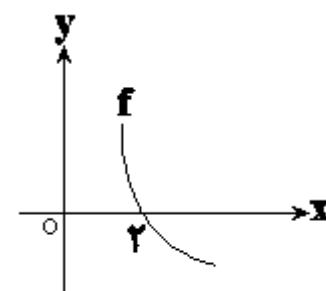
(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»



می‌دانیم $f(2) = 0$ بوده و تابع f اکیداً نزولی است.

$$\frac{x^2}{(x-1)f(x)} \geq 0$$

x	0	1	2
x^2	+	0	+
$x-1$	-	0	+
$f(x)$	+	+	0
مبارت	-	+	-

دامنه تعریف تابع $D_g = (1, 2) \cup \{0\}$ است و شامل یک عدد صحیح نامنفی است.

اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه کرده، سپس ۳ واحد درجهت مثبت محور y ها انتقال دهیم و با ضریب ۲ در راستای افقی انبساط دهیم، نمودار حاصل با کدام طول خط $y = 8$ را قطع می‌کند؟

(۱) ۲

(۲) -۴

(۳) ۴

(۴) -۲

پاسخ: گزینه ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۵%

ساده

گزینه «۳»

قرینه نسبت به $y = x$ یعنی همان وارون کردن:

$$y = \sqrt{x-1}; y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x-1 \Rightarrow y^2 + 1 = x$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$\Rightarrow y = x^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = x^2 + 4; x \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{انبساط افقی}} y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4$$

$$y = 8 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + 4 = 8 \Rightarrow x^2 = 16$$

$$\Rightarrow x = \pm 4 \xrightarrow{x \geq 0} x = 4$$

۱۱)

اگر نمودار تابع $f(x) = -1 + \sqrt{x+1}$ در بازه (a, b) بالاتر از نمودار تابع $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۲ (۴

۳ (۳

۴ (۲

۱ (۱

ساده

درصد پاسخگویی ۳۹%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

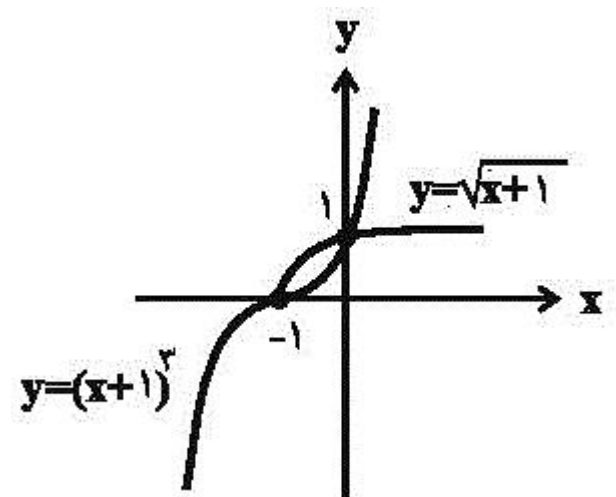
نمودار تابع f بالاتر از g است، بنابراین داریم:

$$f(x) > g(x) \Rightarrow -1 + \sqrt{x+1} > x^3 + 3x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} > x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} > (x+1)^3$$

با رسم نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x+1}$ و $y = (x+1)^3$ در یک دستگاه، می‌توانیم جواب نامعادله بالا را بیابیم:



با توجه به نمودارها، بازه موردنظر $(-1, 0)$ می‌باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1$$

۱۲

اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه R باشد، دامنه تعریف $y = \sqrt{f(|x-2|) - f(|2x-1|)}$ کدام است؟

(۴) $[-1, 1]$

(۳) $(-1, 1)$

(۲) $R - (-1, 1)$

(۱) $R - [-1, 1]$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۹%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه های دام دار ۱

پاسخ: گزینه ۲

y یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است، پس باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$f(|x-2|) - f(|2x-1|) \geq 0 \Rightarrow f(|x-2|) \geq f(|2x-1|)$$

تابعی نزولی اکید است

$$\rightarrow |x-2| \leq |2x-1|$$

توان ۲

$$\rightarrow x^2 - 4x + 4 \leq 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1$$

$$\Rightarrow x \in R - (-1, 1)$$

۱۳

اگر بزرگترین بازه‌ای را که تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & -1 < x \leq 2 \\ -3 & -4 \leq x \leq -1 \\ \sqrt{-x} & -9 \leq x < -4 \end{cases}$ در آن صعودی باشد به صورت $[a, b]$ نشان دهیم، $b - a$ کدام است؟

(۴) ۱۱

(۳) ۶

(۲) ۴

(۱) ۲

ساده

درصد پاسخگویی ۴۶%

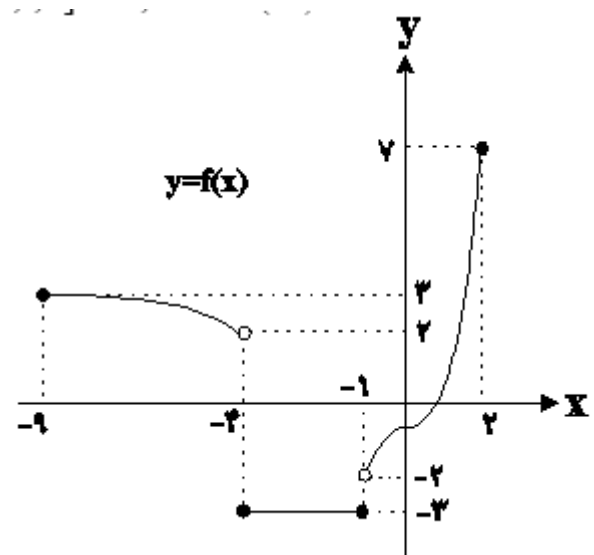
قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا تابع سه ضابطه‌ای $f(x)$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار رسم شده، بزرگترین بازه‌ای که این تابع در آن صعودی است، بازه $[-4, 2]$ است، بنابراین:

$$[a, b] = [-4, 2] \rightarrow b - a = 2 - (-4) = 6$$



به ازای چه مقادیری از m و n ، تابع $f(x) = \begin{cases} |x-1| - n & , x < 0 \\ mx^2 - 2 & , x \geq 0 \end{cases}$ یک تابع اکیداً نزولی است؟

$$(1) \quad n \geq 2, m < 0$$

$$(2) \quad n \leq 2, m > 0$$

$$(3) \quad n \leq 3, m < 0$$

$$(4) \quad n \geq 3, m > 0$$

پاسخ: گزینه ۳

متوسط

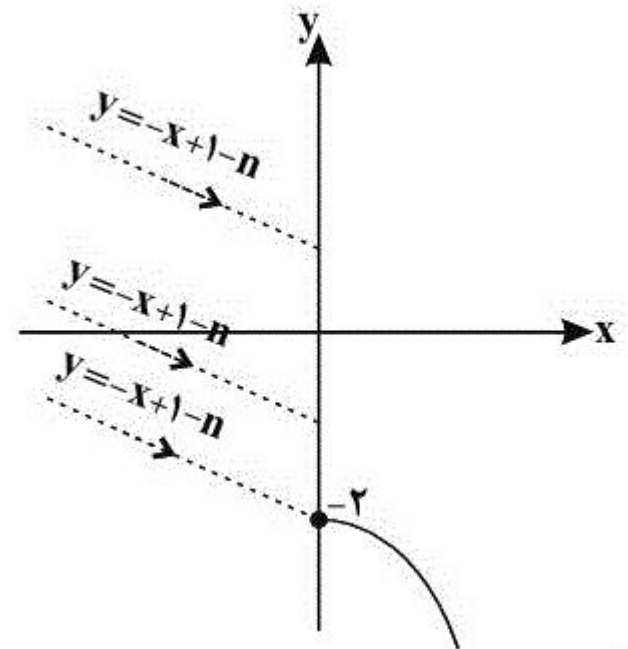
درصد پاسخگویی ۲۰%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۳»

با رسم تقریبی تابع f می‌توانیم به‌خوبی آنرا بررسی کنیم. بنابراین:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 - n & , x < 0 \\ mx^2 - 2 & , x \geq 0 \end{cases}$$



برای اینکه f اکیداً نزولی باشد، باید $m < 0$ باشد و حداکثر مقدار n برابر خواهد بود با:

$$1 - 2 \geq -2 \Rightarrow -2 \geq -3 \Rightarrow n \leq 3$$

۱۵

تابع $f = \{(-1, 4m + 1), (1, m^2 + 1), (0, 5)\}$ ، یک تابع صعودی است. مجموعه همه مقادیر ممکن برای m کدام است؟

(۴) $1 < m < 2$

(۳) $-2 < m < 2$

(۲) $m \leq -2$

(۱) $-2 \leq m < 0$

پاسخ: گزینه ۲

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۸%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۲»

$$-1 < 0 < 1 \xrightarrow{f \text{ صعودی}} f(-1) \leq f(0) \leq f(1) \Rightarrow 4m + 1 \leq 5 \leq m^2 + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 + 1 \geq 5 \Rightarrow m^2 \geq 4 \Rightarrow m \geq 2 \text{ یا } m \leq -2 \\ 4m + 1 \leq 5 \Rightarrow 4m \leq 4 \Rightarrow m \leq 1 \end{cases}$$

اشتراک
 $\longrightarrow m \leq -2$

۱۶

قرینه منحنی به معادله $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ نسبت به خط $y = x$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، ضابطه منحنی حاصل کدام است؟

(۱) $g(x) = x^2 + 2x$

(۲) $g(x) = x^2 - 1$

(۳) $g(x) = x^2 - 2x$

(۴) $g(x) = x^2 + 1$

پاسخ: گزینه ۲

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۴%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۲»

قرینه یک منحنی مانند f نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع f است. لذا باید وارون تابع f را به دست آوریم و سپس آن را یک واحد به راست انتقال دهیم.

$$y = \sqrt{x+1} - 1 \Rightarrow y + 1 = \sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (y + 1)^2 = (\sqrt{x+1})^2$$

$$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = x + 1 \Rightarrow x = y^2 + 2y \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2x$$

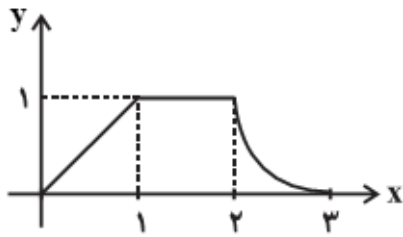
حال باید $f^{-1}(x)$ را یک واحد به راست انتقال دهیم. بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x - 1) = (x - 1)^2 + 2(x - 1)$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 = x^2 - 1 \Rightarrow g(x) = x^2 - 1$$

۱۷

اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، تابع $y = -3f(-x+1)$ در کدام بازه اکیداً نزولی می‌باشد؟



(۱) $[-4, -3]$

(۲) $[-3, -2]$

(۳) $[-2, -1]$

(۴) $[1, 2]$

پاسخ: گزینه ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۳۴% ساده

گزینه «۳»

می‌دانیم اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y = -f(x)$ اکیداً صعودی و تابع $y = -f(-x)$ اکیداً نزولی است.

با توجه به این نکته که انتقال‌ها و انبساط‌ها (انقباض‌ها) تغییری در یکنوایی توابع ایجاد نمی‌کنند، برای پیدا کردن بازه مورد نظر در سؤال، کافی است، بازه متناظر با بازه $[2, 3]$ را در تابع $y = -3f(1-x)$ پیدا کنیم. داریم:

$$2 \leq 1-x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x-1 \leq -2$$

$$\Rightarrow -2 \leq x \leq -1$$

۱۸

اگر تابع $y = -3f(\frac{1}{p}x + 1) - 6$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y = f(-x)$ از لحاظ یکنوایی چگونه است؟

(۱) اکیداً صعودی

(۲) اکیداً نزولی

(۳) ممکن است اکیداً نزولی یا کیداً نزولی باشد.

(۴) غیریکنوا

پاسخ: گزینه ۲

گزینه های دام دار ۱ قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۲۴% متوسط

گزینه «۲»

در تابع $y = -3f(\frac{1}{p}x + 1) - 6$ ضرایب ۱ و $\frac{1}{p}$ و -6 در یکنوایی تابع تأثیری ندارند، اما ضریب -3 نمودار تابع را نسبت به محور x قرینه کرده است. بنابراین چنانچه تابع $y = -3f(\frac{1}{p}x + 1) - 6$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y = f(x)$ حتماً اکیداً صعودی بوده است. همچنین اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً صعودی باشد، تابع $y = f(-x)$ که قرینه تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها می‌باشد، اکیداً نزولی خواهد بود.

نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ با دو انتقال بر نمودار تابع $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ منطبق می‌شود. در این انتقال، نقطه به طول ۲ واقع بر نمودار f به نقطه‌ای با کدام عرض بر نمودار تابع g قرار می‌گیرد؟

۷ (۱)

۶۳ (۲)

-۱ (۳)

۲۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

نسبتا دشوار

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹

گزینه «۱»

ضابطه‌ی تابع g را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x + 1)^3 - 1$$

بنابراین اگر نمودار تابع $f(x) = x^3$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x) = f(x + 1) - 1$ حاصل می‌شود.

بنابراین از طول هر نقطه یک واحد کم شده و از عرض هر نقطه نیز یک واحد کم می‌شود، پس خواهیم داشت:

$$f(2) = 2^3 = 8$$

$$A(2, 8) \xrightarrow{g(x)=f(x+1)-1} A'(2-1, 8-1) = (1, 7)$$

پس نقطه‌ی $(2, 8)$ روی نمودار تابع f به نقطه‌ی $(1, 7)$ روی نمودار تابع g تبدیل می‌شود.

تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & , x \geq 0 \\ (x-1)^3 + 4 & , x < 0 \end{cases}$ مفروض است. به ازای چند مقدار صحیح k ، معادله $f(x) = k$ دارای دو جواب است؟

۲ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

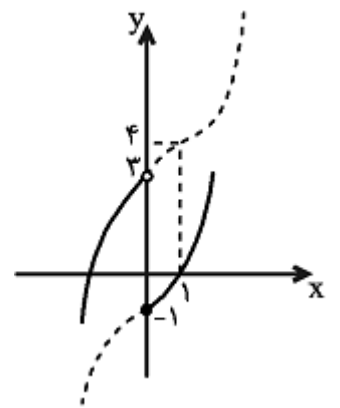
متوسط

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. برای رسم ضابطه‌ی بالایی، کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به پایین انتقال دهیم. برای رسم ضابطه‌ی پایینی، کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به راست و سپس ۴ واحد به بالا انتقال دهیم.



با توجه به نمودار، خط $y = k$ اگر k در محدوده‌ی $-1 \leq k < 3$ باشد، دو نقطه‌ی تلاقی با نمودار f خواهد داشت و در نتیجه معادله $f(x) = k$ دو جواب خواهد داشت.
پس به ازای مقادیر $k = -1, 0, 1, 2$ ، معادله دو جواب دارد.

حدود a برای آن که تابع $y = (a - 4)x^2 - x$ در بازه‌ی $[2, +\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟

$$(۱) \quad a \geq 4 \quad (۲) \quad a \geq \frac{17}{4} \quad (۳) \quad \frac{1}{2} < a < \frac{17}{4} \quad (۴) \quad \frac{1}{3} < a < 4$$

پاسخ: گزینه ۲

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹

نسبتا دشوار

گزینه «۲»

در تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ ، اگر $a > 0$ باشد، تابع در بازه‌ی $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ صعودی و اگر $a < 0$ باشد، در بازه‌ی $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ صعودی است. بنابراین برای اینکه تابع $y = (a - 4)x^2 - x$ در بازه‌ی $[2, +\infty)$ صعودی باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} (۱) \quad x^2 \text{ ضریب} > 0 \Rightarrow a - 4 > 0 \Rightarrow a > 4 \\ (۲) \quad \frac{-b}{2a} \leq 2 \Rightarrow \frac{-(-1)}{2(a-4)} \leq 2 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Rightarrow 2(a - 4) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow a - 4 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow a \geq \frac{17}{4} \quad (II)$$

از اشتراک (۱) و (II) داریم: $a \geq \frac{17}{4}$.

اگر تابع $f(x)$ تابع همانی باشد، به ازای کدام ضابطه برای $g(x)$ ، تابع $(\frac{f}{g})(x)$ در دامنه‌اش اکیداً یکنواست؟

$$\sqrt{x} \quad (۴)$$

$$|x| \quad (۳)$$

$$\frac{1}{x} \quad (۲)$$

$$x - |x| \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

سوالات کتاب آبی ۱۳۹۹ نسبتا دشوار

گزینه «۴»

ضابطه‌ی تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است. با توجه به هر گزینه، ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(۱) \text{ گزینه ی } : (\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{x-|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x-x} = \frac{x}{0} & , x \geq 0 \\ \frac{x}{x-(-x)} = \frac{x}{2x} & , x < 0 \end{cases}$$

تابع ثابت، اکیداً یکنوا نیست. $\Rightarrow (\frac{f}{g})(x) = \frac{1}{2} , x < 0$

یکنوا نیست. $\Rightarrow (\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{\frac{1}{x}} = x^2 , x \neq 0$ (۲) گزینه ی

$$(۳) \text{ گزینه ی } : (\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} & , x > 0 \\ \frac{x}{-x} & , x < 0 \end{cases}$$

تابع، اکیداً یکنوا نیست. $\Rightarrow (\frac{f}{g})(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$

اکیداً صعودی است. $(۴) \text{ گزینه ی } : (\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} , x > 0$

حاصل عبارت $\sqrt[۴]{(۴ + \sqrt{۷})^{-1}} \sqrt{1 + \sqrt{۷}}$ کدام است؟

$$۲\sqrt[۴]{۲} \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$\sqrt[۴]{۲} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

سراسری ۱۴۰۱ نسبتا دشوار

گزینه «۲»

$$(۴ + \sqrt{۷})^{-1} = \frac{1}{۴ + \sqrt{۷}} \times \frac{۴ - \sqrt{۷}}{۴ - \sqrt{۷}} = \frac{۴ - \sqrt{۷}}{۹} = \frac{۸ - ۲\sqrt{۷}}{۱۸} = \frac{(\sqrt{۷}-1)^2}{۱۸}$$

$$\sqrt[۴]{\left(\frac{(\sqrt{۷}-1)^2}{۱۸}\right)} = \frac{\sqrt{\sqrt{۷}-1}}{\sqrt[۴]{۱۸}} \Rightarrow \frac{\sqrt{\sqrt{۷}-1}}{\sqrt[۴]{۱۸}} \times \sqrt{1 + \sqrt{۷}} = \frac{\sqrt{۶}}{\sqrt[۴]{۱۸}} = \sqrt[۴]{۲}$$

۲۴

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4x - x^2$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{10}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$4(x+2) - (x+2)^2 = -x^2 + 4$$

$$4x - x^2 = -x^2 + 4 \rightarrow x = 1 \quad OA = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

۲۵

تابع $f(x) = (-9 + k^2)x^3 + 5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k ، چه قدر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

اکیداً نزولی یعنی: $k < -3, k > 3 \Rightarrow k^2 - 9 < 0$ پس مجموع آنها صفر است.

سراسری ۱۴۰۱

دشوار

سراسری ۱۴۰۱

نسبتاً ساده

۲۶

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

متوسط

خارج از کشور ۱۴۰۱

گزینه «۴»

$$f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{راست}} \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\text{قرینه به محور } x} \frac{-1}{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{پایین}} \frac{-1}{x-1} - 2$$

$$\frac{1}{x} = \frac{-1}{x-1} - 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x^2-x} = -2 \Rightarrow 2x-1 = -2x^2+2x \Rightarrow 2x^2=1$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm \sqrt{2}$$

$$\text{مثلاً } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), (0,0) \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۲۷

تابع f روی R اکیداً نزولی است. اگر $f(3) = 0$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) صفر

پاسخ: گزینه ۴

نسبتاً ساده

خارج از کشور ۱۴۰۱

گزینه «۴»

$$x^2 f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow 0, 1, 2, 3$$

۴ تا

۲۸

تابع با ضابطه $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$ ، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟(۴) $(2, +\infty)$ (۳) $(-1, 2)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۱) $(-\infty, 2)$

ساده

درصد پاسخگویی ۵۵%

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$f(x) = |x + 1| - |x - 2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 - (x - 2) = 3, & x > 2 \\ x + 1 + (x - 2) = 2x - 1, & -1 \leq x \leq 2 \\ -(x + 1) + (x - 2) = -3, & x < -1 \end{cases}$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید در بازه $(-1, 2)$ ، تابع f یک تابع خطی با شیب مثبت است که می‌دانیم توابع خطی با شیب مثبت اکیداً صعودی هستند.

۲۹

اگر $f(x)$ تابع همانی باشد، به ازای کدام ضابطه برای $g(x)$ ، تابع $y = (\frac{f}{g})(x)$ در دامنه‌اش اکیداً یکنوا است؟(۴) $\sqrt{x}$ (۳) $|x|$ (۲) $\frac{1}{x}$ (۱) $x - |x|$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۳%

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\text{اگر } g(x) = \sqrt{x} \text{ باشد: } y = (\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, \quad x > 0$$

اکیداً صعودی است.

۳۰

نمودار تابع $f(x) = (x+1)^3$ را ابتدا در راستای محور x ها با ضریب ۳ انبساط داده، سپس نسبت به محور y ها قرینه و در نهایت نمودار حاصل را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. نمودار کدام تابع به دست می‌آید؟

$$y = -\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^3 - 1 \quad (۲)$$

$$y = \left(-\frac{1}{3}x + 1\right)^3 - 1 \quad (۴)$$

$$y = -\left(\frac{1}{3}x + 1\right)^3 - 1 \quad (۱)$$

$$y = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^3 - 1 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

در راستای محور x ها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم

$$f(x) = (x+1)^3 \xrightarrow{\text{در راستای محور } x \text{ ها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم}} y = \left(\frac{1}{3}x + 1\right)^3$$

نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم

$$\xrightarrow{\text{نسبت به محور } y \text{ ها قرینه می‌کنیم}} y = \left(-\frac{1}{3}x + 1\right)^3 \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^3 - 1$$

۳۱

برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & x \geq 0 \\ a + x & x < 0 \end{cases}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، کمترین مقدار a کدام است؟

$$-۲ \quad (۴)$$

$$-۱ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

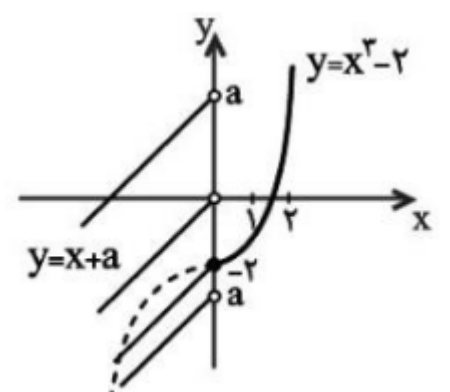
گزینه «۴»

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & x \geq 0 \\ x + a & x < 0 \end{cases}$$

برای رسم ضابطه‌ی بالایی تابع f ، نمودار تابع $y = x^3$ را دو واحد به پایین منتقل کرده، سپس قسمت چپ محور y ها را حذف می‌کنیم.

با توجه به نمودار، برای آنکه برد تابع برابر با R شود، باید $a \geq -2$ باشد، پس کمترین مقدار a برابر با -2 است.



اگر $y = f(x)$ تابعی نزولی اکید و مثبت باشد، کدام تابع زیر الزاماً اکیداً صعودی است؟

- (۱) $\frac{-1}{f(x)}$ (۲) $\frac{1}{f(x)}$ (۳) $f^3(x)$ (۴) $\sqrt{f(x)}$

پاسخ: گزینه ۲

ساده درصد پاسخگویی ۴۰% قلمچی ۱۴۰۰

گزینه «۲»

تابع f اکیداً نزولی است پس اگر $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$. حال برای هر گزینه به ازای $x_1 < x_2$ ، مقادیر تابع را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $\frac{-1}{f(x)}$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ اکیدا نزولی}} f(x_1) > f(x_2)$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)} \xrightarrow{\times(-1)} \frac{-1}{f(x_1)} > \frac{-1}{f(x_2)}$$

تابع $\frac{-1}{f}$ اکیداً نزولی است.

گزینه‌ی (۲): $\frac{1}{f(x)}$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ اکیدا نزولی}} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)}$$

تابع $\frac{1}{f}$ اکیداً صعودی است.

گزینه‌ی (۳): $f^3(x)$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ اکیدا نزولی}} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{\text{به توان ۳}} f^3(x_1) > f^3(x_2)$$

گزینه‌ی (۴): $\sqrt{f(x)}$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \text{ اکیدا نزولی}} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{f(x_1)} > \sqrt{f(x_2)}$$